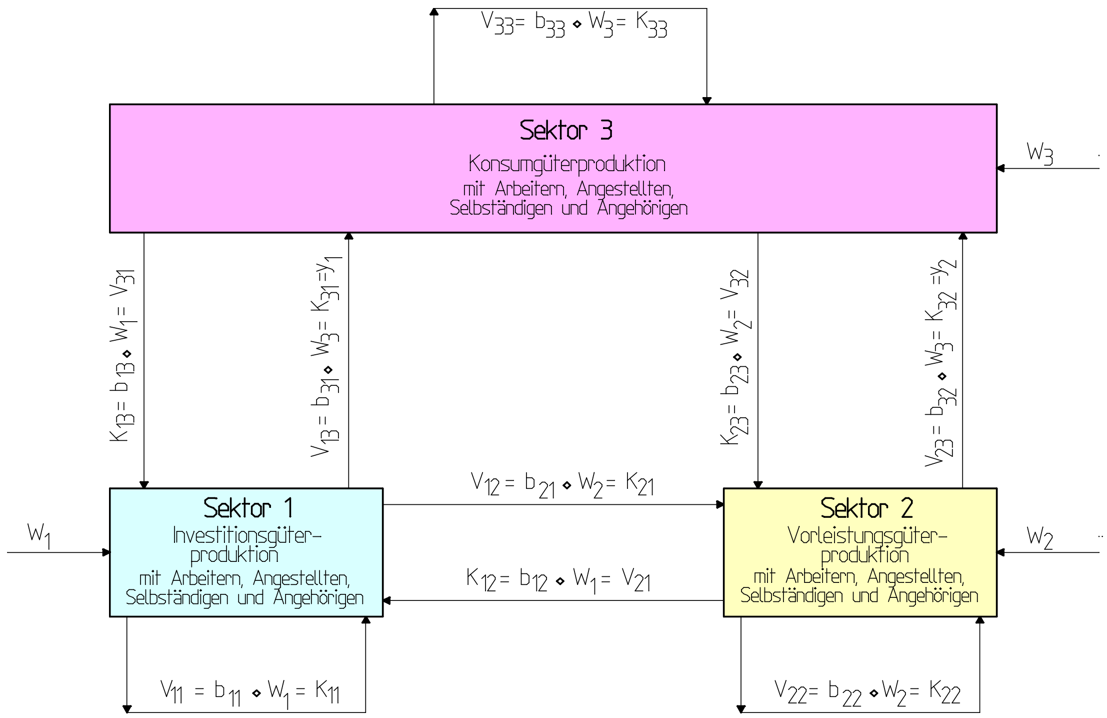
Wolfgang Hoss August 2008

Herstellung des Gleichgewichts von Käufen und Verkäufen in Mehrsektorenmodellen auf Basis monetärer Koeffizienten

Um so differenzierter die Strukturen des Wirtschaftssystems abgebildet werden sollen, um so mehr Sektoren also unterschieden werden sollen, um so schwierig wird es im allgemeinen im Modell in jedem Sektor die Summe aller Käufe mit der Summe aller Verkäufe in Übereinstimmung zu bringen. Bereits in einem 3-Sektorenmodell kann es schwierig sein ein solches Gleichgewicht der Zirkulation herzustellen. Mit Hilfe von monetären Koeffizienten und den bekannten Leontief-Gleichungssystemen lassen sich solche Aufgaben für beliebig viele Sektoren lösen.

Im Modell nach **ABB1** werden in einem geschlossenen Wirtschaftssystem die 3 Sektoren



V_{ij} Verkauf im Geldmaß, der Sektor i verkauft an den Sektor j, z.B. V_{12} Sektor 1 verkauft an den Sektor 2

K_{ji} Kauf im Geldmaß, der Sektor j kauft vom Sektor i, z.B. K_{21} Sektor 2 kauft von Sektor 1

Es gilt allgemein $V_{ij} = K_{ji}$, z.B. $V_{12} = K_{21}$

$b_{ji} = \frac{K_{ji}}{W_j}$ monetärer Koeffizient, z.B. $b_{21} = \frac{K_{21}}{W_2}$

ABB 1 Blockschaltbild für ein 3-Sektorenmodell. Bestimmung der Kauf-Verkauf-Verflechtungen auf Basis monetärer Koeffizienten

Investitionsgüterproduktion (Anlageproduktionsmittelproduktion), Vorleistungsgüterproduktion (Umlaufproduktionsmittelproduktion) und Konsumgüterproduktion unterschieden. Zu jedem Sektor gehören im Modell die beschäftigten Arbeiter, Angestellten, Selbständigen und ihre Familienangehörigen, auch die zeitweilig Arbeitslosen, die dort integriert sind. Diese Angehörigen des Produktionssystems kaufen mit einem Teil oder ihrem gesamten Einkommen Konsumgüter, das heißt jeder Sektor kauft sowohl Produktionsmittel als auch Konsumtionsmittel. Eine Differenzierung in Haushalte und Unternehmen ist damit nicht nötig, was die Kreislaufanalysen ganz erheblich erleichtert und die Schaltbilder vereinfacht.

Die "öffentlichen Haushalte" (Staat) und ihnen zugehörige Personen, z.B. Beamte, Politiker, Angestellte der öffentlichen Verwaltungen und der sozialen Sicherungssysteme, sind vorerst aus der Betrachtung ausgeschlossen.

Die Warenverkäufe V (einschließlich Verkäufe von Dienstleistungen) stellen ohne Zweifel Wertoutputs aus den Produktionssystemen (Sektoren) dar. Der Wert der produzierten Ware W kann zwar mit dem in der gleichen Periode verkauften Wert übereinstimmen, aber das muß in der realen Welt keinesfalls immer der Fall sein. Nicht jede beliebige Menge und Art der durch eine Unternehmen oder einen Sektor in der Periode produzierten Ware kann mit Sicherheit in der gleichen Periode auch verkauft werden. Die Differenz zwischen dem produzierten Wert W und dem verkauften Wert V ist die Warenvorrartsänderung $\Delta H = W - V$. Im Normalfall schwankt der Vorrat an noch nicht verkaufter Ware in den Lagern der Produzent ständig, das heißt im Hauptfall besteht in den realen Produktionssystemen eine Differenz zwischen der Produktion W und dem Output V. Die Produktion W und der Output V stimmen im allgemeinen nicht überein. Die Produktion an unfertiger und fertiger noch nicht verkaufter Ware vergrößert zunächst den Warenvorrat und ist für das Produktionssystem damit zunächst ein Wertinput, und man hofft diesen Input später in einen Output verwandeln zu können. In unserem Modell wird die Produktion W daher als Wertinput in das Produktionssystem bzw. in den Sektor behandelt. Der Output hingegen ist der Warenverkauf V.

Eine Gleichsetzung der Produktion W mit dem Output V ist in der Theorie natürlich jederzeit möglich, wenn man aber im allgemeinen Prinzip im Modell die Produktion W und den Umsatz V symbolisch unterscheidet, dann können jederzeit auch Differenzen dieser Größe, die in der Praxis auftreten und von elementarer Bedeutung für die gestörte Warenzirkulation sind, im theoretischen System behandelt bzw. modelliert werden. Schließt man hingegen Differenzen zwischen Produktion W und Verkäufe V grundsätzlich aus der theoretischen Betrachtung aus, dann schließt man die gestörte Warenzirkulation und damit die Möglichkeit von Überangeboten und Übernachfragen grundsätzlich aus der ökonomischen Analyse aus. Wäre die produzierte Ware identisch mit der verkauften Ware, dann könnte es unmöglich unverkaufte Warenvorräte geben - es könnte damit keine Überproduktionen geben. Es ist also zu Bedenken daß die Gleichsetzung von Produktion und Output nur in einem Sonderfall richtig ist, daß aber im allgemeinen die Produktion einen Wertinput in das Produktionssystem darstellt und keinen Wertoutput.

Für theoretische Modellierungen von Zirkulationsstörungen ist es zunächst unumgänglich nötig die ungestörte Zirkulation zu modellieren. In unserem 3-Sektoren-Modell nach ABB3 kommt es also zunächst darauf an, den Gleichgewichtszustand der Zirkulation zu finden. Es muß hierfür in erster Linie in jedem Sektor die Summe aller Käufe K mit der Summe aller Verkäufe V übereinstimmen.

Meines Erachtens haben monetäre Koeffizienten der Input-Output-Analyse für die politökonomische Theorie eine größere Bedeutung als Naturalmengenkoeffizienten (obwohl üblicherweise gegenteilige Vorstellungen vorherrschend sind). Im folgenden soll sich der Nutzen monetärer Koeffizienten für die allgemeine politökonomische Theorie herausstellen.

In unserem 3-Sektorenmodell nach ABB3 sind folgende monetäre Koeffizienten definiert::

Tabelle 1 Monetäre Koeffizienten des 3-Sektorenmodells nach ABB1

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
	Investitionsquoten	Vorleistungsquoten	Konsumquoten
Sektor 1	$b_{11} = \frac{K_{11}}{W_1}$	$b_{12} = \frac{K_{12}}{W_1}$	$b_{13} = \frac{K_{13}}{W_1}$
Sektor 2	$b_{21} = \frac{K_{21}}{W_2}$	$b_{22} = \frac{K_{22}}{W_2}$	$b_{23} = \frac{K_{23}}{W_2}$
Sektor 3	$b_{31} = \frac{K_{31}}{W_3}$	$b_{32} = \frac{K_{32}}{W_3}$	$b_{33} = \frac{K_{33}}{W_3}$

Im 3-Sektorenmodell nach ABB1 ist die ökonomische Interpretation dieser monetären Koeffizienten eine einfache, d.h. in Spalte 1 der Tabelle 1 stehen die Investitionsquoten, in Spalte 2 die Vorleistungsquoten und in Spalte 3 stehen die Konsumquoten der 3 Sektoren, jeweils definiert als Investitionsgüterkäufe bzw. Vorleistungsgüterkäufe bzw. Konsumgüterkäufe bezogen auf das Produkt W des Sektors.

Durch Umformung der monetären Koeffizienten erhält man die Formeln für die Investitionsgüterkäufe, Vorleistungsgüterkäufe und Konsumgüterkäufe der einzelnen Sektoren, so wie man dies Tabelle 2 entnehmen kann:

Tabelle 2 Nachfragekomponenten (Käufe) im 3-Sektorenmodell nach ABB1

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
	Investitionsgüterkäufe	Vorleistungsgüterkäufe	Konsumgüterkäufe
Sektor 1	$K_{11} = b_{11} \bullet W_1$	$K_{12} = b_{12} \bullet W_1$	$K_{13} = b_{13} \bullet W_1$
Sektor 2	$K_{21} = b_{21} \bullet W_2$	$K_{22} = b_{22} \bullet W_2$	$K_{23} = b_{23} \bullet W_2$
Sektor 3	$K_{31} = b_{31} \bullet W_3$	$K_{32} = b_{32} \bullet W_3$	$K_{33} = b_{33} \bullet W_3$

Zur Bestimmung der Verflechtungen aller Käufe und Verkäufe müssen in einem der Sektoren die Produktion W und die Käufe von den anderen Sektoren gegeben sein. In **Szenario A0** wurde im Sektor 3, also im Sektor der Konsumgüterproduktion, in der betrachteten Periode der Wert $W_3 = 40$ GE (GE=Geldeinheiten) als gegeben vorausgesetzt. Ferner sind im Sektor 3 die Investitionsgüterkäufe $K_{31} = 4$ GE und die Vorleistungsgüterkäufe $K_{32} = 20$ GE und die Konsumgüterkäufe $K_{33} = 16$ GE gegeben. Damit stimmen die Gesamtkäufe $K_3 = K_{31} + K_{32} + K_{33} = 4 + 20 + 16 = 40$ GE des Sektors 3 mit der Produktion $W_3 = 40$ GE überein.

Wir setzen im Modell in Szenarios A0 ungestörte einfache Reproduktion und damit ungestörtes Nullwachstum im echten Wertmaß voraus. Eine Störung würde z.B. vorliegen, wenn die Investitionsgüterkäufe den Investitionsgüterverbrauch (Anlageproduktionsmittelverbrauch) übersteigen würden, d.h. wenn z.B. die Investition $K_{a_1} = K_{11} = b_{11} \bullet W_1$ den Anlageproduktionsmittelverbrauch $C_{a_1} = a'_1 \bullet W_1$ übersteigen würde. In diesem Fall wäre der Nachfrage-Wertteil $K_{11} = b_{11} \bullet W_1 = K_{a_1}$ größer als der

Angebots-Wertteil $C_{a_1} = a'_1 \bullet W_1$. Zum Beispiel bei einer Investition von $K_{a_1} = 6{,}5$ GE und einem Anlageproduktionsmittelverbrauch von $C_{a_1} = 4$ GE (Abschreibung) würde der Nachfragewertteil den Angebotswertteil um 2,5GE übersteigen. In diesem Wertteil würde also eine Warenübernachfrage erzeugt werden. Wenn aber die Investitionsquote $b'_a = \frac{K_{11}}{W_1}$ gleichgroß der Anlageproduktionsmittelverbrauchsquote (Abschreibungsquote) $a'_1 = \frac{C_{a_1}}{W_1}$ ist, dann stimmen Angebot und Nachfrage in diesem Wertteil a überein.

Wenn ferner die Vorleistungsgüterkaufquote $b'_{u_1} = \frac{K_{12}}{W_1}$ mit der Vorleistungsgüterverbrauchsquote $u'_1 = \frac{C_{u_1}}{W_1}$ übereinstimmt, dann stimmen auch in diesem zweiten Wertteil u Angebot und Nachfrage überein.

Schließlich stimmen Angebot und Nachfrage auch im dritten Wertteil n des Warenprodukts überein, wenn die Konsumquote $b'_{n_1} = \frac{K_{33}}{W_3}$ mit der Neuwertrate $n'_1 = \frac{N_1}{W_1}$ übereinstimmt.

Unterschiede der Kaufquoten (b'_a Investitionsquote, b'_u Vorleistungsquote, b'_n Konsumquote) zu den Verbrauchsquoten (a', u') und der Neuwertquote n' kennzeichnen also Zirkulationsstörrungen. Sie signalisieren Differenzen zwischen nachgefragtem bzw. gekauften Wert K und angebotenem Wert W (Produktion).

Stimmen hingegen die Investitionsquote b'_a, Vorleistungsquote b'_u und Konsumquote b'_n mit der Anlageproduktionsmittelverbrauchsquote (Abschreibungsquote) a' bzw. der Vorleistungsgüterverbrauchsquote (Materialverbrauchsquote) u' bzw. der Neuwertquote n' überein, dann liegt im System ungestörte Reproduktion und Zirkulation vor, d.h. Käufe K und Produktion W stimmen dann überein.

Allgemein addieren sich bei ungestörter einfacher Reproduktion die Investitionsquote und Vorleistungskaufquote und Konsumquote zur Zahl 1. Im 3-Sektorenmodell nach ABB1 gelten demnach folgende Beziehungen:

$$b'_{11}+b'_{12}+b'_{13}=1$$

$$b'_{21}+b'_{22}+b'_{23}=1 \qquad \text{Bedingungen für ungestörte einfache Reproduktion (Gleichgewicht)}$$

$$b'_{31}+b'_{32}+b'_{33}=1$$

In Tabelle 3 sind für das Beispiel nach Szenario A0 die Beträge der monetären Koeffizienten für jeden Sektor für den Fall der ungestörten einfachen Reproduktion bzw. der Übereinstimmung der Gesamtkaufsumme und der Gesamtverkaufsumme in jedem Sektor zusammengestellt (sie sind zum Teil technisch-technologisch und zum Teil auf Grund der Verhältnisse auf dem Markt bestimmt).

Tabelle 3 Monetäre Koeffizienten des 3-Sektorenmodells nach ABB1, Szenario A0 (bei ungestörter einfacher Reproduktion)				
	Spalte 1 Investitionsquoten	Spalte 2 Vorleistungsquoten	Spalte 3 Konsumquoten	Summe Zeile b
Sektor 1	$b_{11}=\frac{K_{11}}{W_1}=0{,}12$	$b_{12}=\frac{K_{12}}{W_1}=0{,}5$	$b_{13}=\frac{K_{13}}{W_1}=0{,}38$	1
Sektor 2	$b_{21}=\frac{K_{21}}{W_2}=0{,}08$	$b_{22}=\frac{K_{22}}{W_2}=0{,}5$	$b_{23}=\frac{K_{23}}{W_2}=0{,}42$	1
Sektor 3	$b_{31}=\frac{K_{31}}{W_3}=0{,}1$	$b_{32}=\frac{K_{32}}{W_3}=0{,}5$	$b_{33}=\frac{K_{33}}{W_3}=0{,}4$	1

Gegeben sind in Szenario A0 ferner folgende Daten im Sektor 3:

Tabelle 4 Gegeben in Sektor 3
$K_{31}=y_1=4$
$K_{32}=y_2=20$
$K_{33}=16$
$K_3=W_3=40$

Bei ungestörter einfacher Reproduktion gilt in jedem Sektor $W=V=K$, und in diesem Fall gelten im Sektor 1 für die Käufe und Verkäufe folgende Beziehungen:

$$W_1 = V_1 = V_{11} + V_{12} + V_{13}$$
$$W_1 = K_1 = K_{11} + K_{21} + K_{31}$$
$$W_1 = b_{11} \bullet W_1 + b_{21} \bullet W_2 + K_{31}$$

Umformung der letzten Gleichung führt zu:

$$(1 - b_{11}) \bullet W_1 - b_{21} \bullet W_2 = K_{31} \qquad (1)$$

Im Sektor 2 gilt:

$$W_2 = V_2 = V_{21} + V_{22} + V_{23}$$
$$W_2 = K_2 = K_{12} + K_{22} + K_{32}$$
$$W_2 = b_{12} \bullet W_1 + b_{22} \bullet W_2 + K_{32}$$

Umformung der letzten Gleichung führt zu:

$$-b_{12} \bullet W_1 + (1 - b_{22}) \bullet W_2 = K_{32} \qquad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) bilden folgendes Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} (1 - b_{11}) \bullet W_1 - b_{21} \bullet W_2 = K_{31} \\ - b_{12} \bullet W_1 + (1 - b_{22}) \bullet W_2 = K_{32} \end{array} \right| \qquad (3)$$

Einsetzen der Koeffizienten $b_{11} = 0{,}12$ und $b_{21} = 0{,}08$ und $b_{12} = 0{,}5$ und $b_{22} = 0{,}5$ nach Tabelle 3 und der Käufe (Nachfrage) des Sektors 3 $K_{31} = 4$ und $K_{32} = 20$ nach Tabelle 4 in (3) führt zum speziellen Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 0{,}88 \bullet W_1 - 0{,}08 \bullet W_2 = 4 \\ -0{,}5 \bullet W_1 + 0{,}5 \bullet W_2 = 20 \end{array} \right|$$

Die Matrix hierzu ist:

$$\begin{vmatrix} 0{,}88 & -0{,}08 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 20 \end{vmatrix}$$

Die Lösungen sind $W_1 = 9$ und $W_2 = 49$.

Damit ergeben sich folgende Käufe und Verkäufe der Sektoren 1 und 2 im einzelnen:

$K_{11} = b_{11} \bullet W_1 = 0{,}12 \bullet 9 = 1{,}08$

$K_{12} = b_{12} \bullet W_1 = 0{,}5 \bullet 9 = 4{,}5$

$K_{13} = b_{13} \bullet W_1 = 0{,}38 \bullet 9 = 3{,}42$

$K_1 = 1{,}08 + 4{,}5 + 3{,}42 = 9$

$K_{21} = b_{21} \bullet W_2 = 0{,}08 \bullet 49 = 3{,}92$

$K_{22} = b_{22} \bullet W_2 = 0{,}5 \bullet 49 = 24{,}5$

$K_{23} = b_{23} \bullet W_2 = 0{,}42 \bullet 49 = 20{,}58$

$K_2 = 3{,}92 + 24{,}5 + 20{,}58 = 49$

$V_{11} = K_{11} = 1{,}08$

$V_{12} = K_{21} = 3{,}92$

$V_{13} = K_{31} = 4$

$V_1 = 1{,}08 + 3{,}92 + 4 = 9$

$V_{21} = K_{12} = 4{,}5$

$V_{22} = K_{22} = 24{,}5$

$V_{23} = K_{32} = 20$

$V_2 = 4{,}5 + 24{,}5 + 20 = 49$

Man sieht, daß die Summen aller Käufe und Verkäufe in den Sektoren 1 und 2 übereinstimmen. Damit liegt ungestörte Zirkulation (Gleichgewicht) in diesen Sektoren vor.

Die Käufe und Verkäufe des Sektors 3 sind:

$K_{31} = 4$

$K_{32} = 20$

$K_{33} = b_{33} \bullet W_3 = 0{,}4 \bullet 40 = 16$

$K_3 = 4 + 20 + 16 = 40$

$V_{31} = K_{13} = 3{,}42$

$V_{32} = K_{23} = b_{23} \bullet W_2 = 0{,}42 \bullet 49 = 20{,}58$

$V_{33} = K_{33} = 16$

$V_3 = 3{,}42 + 20{,}58 + 16 = 40$

Die drei Bedingungen $W_1 = V_1 = K_1$ und $W_2 = V_2 = K_2$ und $W_3 = V_3 = K_3$ sind erfüllt. Angebot W_i und Nachfrage $K_i = V_i$ stimmen in jedem Sektor i überein.

Das 3-Sekotrenmodell kann auf n-Sektoren erweitert werden, also auf Systeme mit beliebig vielen Sektoren und beliebig vielen Naturalformen der Produkte. Für ein System mit n Sektoren erhält man ein Gleichungssystem mit $k = n - 1$ Gleichungen. Zum Beispiel für ein System mit n=5 Sektoren erhält man ein Gleichungssystem mit k=4 Gleichungen und k=4 Unbekannten. Allgemein gilt für ein System mit n-Sektoren:

$$
\begin{aligned}
&(1-b_{11})\bullet W_1 - b_{21}\bullet W_2 - b_{31}\bullet W_3 - \ldots\ldots\ldots\ldots - b_{k1}\bullet W_k = K_{n1}\\
&-b_{12}\bullet W_1 + (1-b_{22})\bullet W_2 + b_{32}\bullet W_3 - \ldots\ldots\ldots - b_{k2}\bullet W_k = K_{n2}\\
&-b_{13}\bullet W_1 - b_{23}\bullet W_2 + (1-b_{33})\bullet W_3 - \ldots\ldots\ldots - b_{k3}\bullet W_k = K_{n3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-b_{1k}\bullet W_1 - b_{2k}\bullet W_2 - b_{3k}\bullet W_3 - \ldots\ldots\ldots - (1-b_{kk})\bullet W_k = K_{nk}
\end{aligned}
$$

In einem System mit n=5 Sektoren gilt in der letzten rechten Spalte (5.Spalte):

1. Zeile (Sektor 1) 5.Spalte: $K_{51} = b_{51} \bullet W_5$

2. Zeile (Sektor 2) 5.Spalte: $K_{52} = b_{52} \bullet W_5$

3. Zeile (Sektor 3) 5.Spalte: $K_{53} = b_{53} \bullet W_5$

4. Zeile (Sektor 4) 5.Spalte: $K_{54} = b_{54} \bullet W_5$

5. Zeile (Sektor 5) 5.Spalte: $K_{55} = b_{55} \bullet W_5$

Wenn die Summe aller Käufe und Verkäufe in jedem Sektor übereinstimmen soll, wenn also ein allgemeines Zirkulationsgleichgewicht bestehen soll, dann muß die Summe aller Koeffizienten in jeder Zeile der Koeffiziententabelle (einschließlich des Koeffizienten der Spalte n die nicht zum Gleichungssystem gehört), die Zahl 1 ergeben. Im Beispiel von 5 Sektoren muß dann auch $b_{51} + b_{52} + b_{53} + b_{54} + b_{55} = 1$ gelten. Die Produktion W_5 kann im Geldbetrag beliebig ausgewählt werden. Damit bestimmen diese Koeffizienten und die Produktion W_5 die Einzelkäufe K_{51}, K_{52}, K_{53} und K_{54} (y-Werte) auf der rechten Seite des Gleichungssystems zur Berechnung der Produktion der anderen Sektoren.

Die Resultate der Berechnungen im Beispiel des 3-Sektorenmodell nach ABB1 können auch im Tabellenschema dargestellt werden, das durch Marx benutzt wurde. In unserem Beispiel wurden allerdings die Wertteile v+m nach Marxens Notation zum Neuwert n zusammengefaßt (es gilt n=v+m), und der Wertteil c wurde in die Teile a (Anlageproduktionsmittel bzw. Investitionsgüter) und u (Umlaufproduktionsmittel bzw. Vorleistungen) gegliedert, so daß c=a+u gilt. In Tabelle 5 sind die Resultate des Szenarios A0 zusammengestellt.

Tabelle 5 Darstellung der Resultate des Szenario A0 mit Tabellenschema nach Marxens Methode				
	$c = a + u$		$n = v + m$	
	a	u	n	Summe Zeile
Sektor 1	$1{,}08_a$	$4{,}5_u$	$3{,}42_n$	$K_1 = W_1 = 9$
Sektor 2	$3{,}92_a$	$24{,}5_u$	$20{,}58_n$	$K_2 = W_2 = 49$
Sektor 3	4_a	20_u	16_n	$K_3 = W_3 = 40$
Summe Spalte	$V_1 = W_1 = 9_a$	$V_2 = W_2 = 49_u$	$V_3 = W_3 = 40_n$	$V_{ges} = K_{ges} = W_{ges} = 98$

Der Wert des Gesamtprodukts beträgt $W_{ges} = W_1 + W_2 + W_3 = 9_a + 49_u + 40_n = 98$, das heißt er entspricht der Summe der Produkte aller Sektoren. Die These von Adam Smith, daß der Wert des Gesamtprodukts nur durch den neu produzierten Wert bestimmt ist (im Beispiel wäre er $W_{ges} = 40$), hat Marx einen närrischen Schnitzer von A. Smith genannt (vgl. Das Kapital, Zweiter Band bzw. MEW Bd.24, S.372). Zu den vielzähligen Verwirrungen die dieses Dogma anrichtet, gehört z.B. das sonderbare Resultat, daß die Industrieproduktion größer sein soll als das Gesamtprodukt einschließlich Landwirtschaft und Dienstleistungssektor der Volkswirtschaft.